ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΠΑΛ 2021

$\cdots$ Ενδεικτικές Απαντήσεις $\cdots$

Επιμέλεια : Χαράλαμπος Καραγιαννίδης

7MATHS

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω $x_1, x_2, \ldots, x_\kappa$ οι τιμές μίας μεταβλητής Χ ενός δείγματος μεγέθους ν, όπου κ, ν μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί *με* $\kappa \leq \nu$.

Τι ονομάζεται (απόλυτη) συχνότητα ν_i που αντιστοιχεί στην τιμή x_i, όπου $i = 1, 2, \ldots, \kappa$;

Μονάδες 4

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α1. Συχνότητα (απόλυτη) ν_i που αντιστοιχεί στην τιμή x_i είναι ο φυσικός αριθμός που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή x_i της εξεταζόμενης μεταβλητής Χ στο σύνολο των παρατηρήσεων .

Α2. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$, όπου $x, c \in \mathbb{R}$ *και* c σταθερά, είναι ίση με το μηδέν, δηλαδή $f'(x) = (c)' = 0$.

Μονάδες 6

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α2. Έχουμε ότι

$$f(x+h) - f(x) = c - c = 0$$

και για $h \neq 0$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0 \ ,$$

οπότε

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0 \ .$$

Άρα $(c)' = 0$.

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Οι διακριτές μεταβλητές μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή ενός διαστήματος πραγματικών αριθμών (α,β).

β. Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μίας ποιοτικής μεταβλητής.

γ. Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.

Μονάδες 6

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α3. (α) Λάθος (β) Σωστό (γ) Λάθος

Α4. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε:

α. $\left(\frac{1}{x}\right)' =$.........., με $x \neq 0$.

β. $\left(x^{\nu}\right)' =$..........., όπου ν φυσικός αριθμός.

γ. $(c \cdot f(x))' =$.........., όπου $c \in \mathbb{R}$ και $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 9

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α4. (α) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

(β) $\left(x^{\nu}\right)' = \nu \cdot x^{\nu - 1}$

(γ) $\left(c \cdot f(x)\right)' = c \cdot f'(x)$

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-\alpha x+2$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$ σταθερά και $x\in\mathbb{R}$.

Β1. Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε σημείο με τετμημένη ίση με 1, να βρείτε την τιμή του α.

Μονάδες 5

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Β1. Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο με τετμημένη ίση με 1, συνεπώς έχουμε ότι :

$$\begin{aligned} & f(1)=0 \\ \Leftrightarrow\ & 1^2-\alpha\cdot 1+2=0 \\ \Leftrightarrow\ & 1-\alpha+2=0 \\ \Leftrightarrow\ & -\alpha=-1-2 \\ \Leftrightarrow\ & -\alpha=-3 \\ \Leftrightarrow\ & \alpha=3\,. \end{aligned}$$

Β2. Για $\alpha=3$, να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$g(x)=\frac{f(x)}{x^2-1}$$

Μονάδες 5

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Β2. Για α = 3, η συνάρτηση g γράφεται ως εξής :

$$g(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$$

και συνεπώς για να ορίζεται, θα πρέπει $x^2-1\neq 0 \Leftrightarrow x^2\neq 1 \Leftrightarrow x\neq 1$ και $x\neq -1$.

Επομένως, το πεδίο ορισμού της g είναι :

$$A_g=\mathbb{R}-\{1\,,-1\}$$

Β3. Για $\alpha = 3$, να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$.

Μονάδες 7

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Β3. Στο όριο αυτό, προκύπτει απροσδιοριστία $\frac{0}{0}$, θα χρειαστεί λοιπόν να παραγοντοποιηθούν οι όροι του κλάσματος, ώστε να υπάρξει κάποια απλοποίηση.

Ο αριθμητής παραγοντοποιείται με τη βοήθεια της Διακρίνουσας (ή του σχήματος Horner / των τύπων του Vieta / της διάσπασης - ομαδοποίησης) ως εξής :

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$$

αφού

$$\Delta = (-3)^2 - 4\cdot 1\cdot 2 = 9 - 8 = 1 \text{ , οπότε } \quad x_{1,2} = \begin{cases} \dfrac{-(-3)+\sqrt{1}}{2} = \dfrac{3+1}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \\ \dfrac{-(-3)-\sqrt{1}}{2} = \dfrac{3-1}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \end{cases} .$$

ενώ ο παρονομαστής μπορεί να παραγοντοποιηθεί με διαφορά τετραγώνων (ή με την βοήθεια της Διακρίνουσας / με το σχήμα Horner) ως εξής :

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1) .$$

Οπότε, έχουμε :

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x-2}{x+1} = \frac{1-2}{1+1} = -\frac{1}{2} .$$

Β4. Για $\alpha = 3$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(0, f(0))$.

Μονάδες 8

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Β4. Έχουμε $f(x) = x^2 - 3x + 2$, $x\in\mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x) = (x^2 - 3x + 2)' = 2x - 3$, $x\in\mathbb{R}$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(0, f(0))$ έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με $f\,'(0) = 2 \cdot 0 - 3 = -3$.

Επομένως, η εξίσωσή της είναι :

$$(\varepsilon) : y = -3x + \beta \ .$$

Επειδή το σημείο Μ(0 , f(0)), ως σημείο επαφής, ανήκει στην εφαπτομένη, έχουμε :

$$f(0) = -3 \cdot 0 + \beta$$

$$\Leftrightarrow 0^2 - 3 \cdot 0 + 2 = 0 + \beta$$

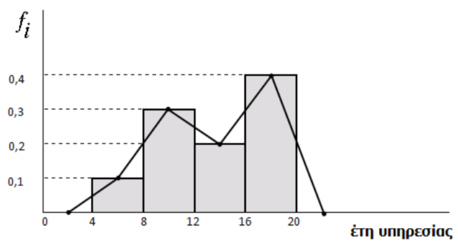
$$\Leftrightarrow \beta = 2 \ .$$

Άρα, η εξίσωση της εφαπτομένης είναι :

$$(\varepsilon) : y = -3x + 2 \ .$$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το παρακάτω ιστόγραμμα και το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων f_i που αφορούν τα έτη υπηρεσίας 50 εκπαιδευτικών.



Γ1. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον πίνακα που ακολουθεί και να τον συμπληρώσετε με βάση το παραπάνω ιστόγραμμα,

Έτη υπηρεσίας [,)	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα ν_i	Σχετική συχνότητα f_i	a_i
[4,8)		5		36°
[8,12)				
[12,16)	14			
[16,20)		20		144°
Σύνολο		50		360°

όπου a_i το αντίστοιχο τόξο ενός κυκλικού τμήματος στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων.

Μονάδες 12

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Γ1. Σύμφωνα με το ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων που δίνεται, έχουμε ότι :

$$f_1 = 0{,}1$$

$$f_2 = 0{,}3$$

$$f_3 = 0{,}2$$

$$f_4 = 0{,}4 \ .$$

Ακόμη, από την σχέση $f_i = \dfrac{\nu_i}{\nu}$ έχουμε ισοδύναμα ότι $\nu_i = f_I \cdot \nu$, όπου ν το μέγεθος του δείγματος, οπότε :

$$\nu_2 = 0{,}3 \cdot 50 = 15$$

$$\nu_3 = 0{,}2 \cdot 50 = 10 \ .$$

Επιπλέον, για τις κεντρικές τιμές x_i των κλάσεων θα έχουμε :

$$x_1 = \frac{4+8}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$x_2 = \frac{8+12}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

$$x_4 = \frac{16+20}{2} = \frac{36}{2} = 18$$

ενώ, για τα τόξα α_2 και α_3 του κυκλικού διαγράμματος, έχουμε :

$$\alpha_2 = f_2 \cdot 360^o = 0{,}3 \cdot 360^o = 108^o$$

$$\alpha_3 = f_3 \cdot 360^o = 0{,}2 \cdot 360^o = 72^o\ .$$

Επομένως, ο πίνακας συμπληρώνεται ως εξής :

Έτη υπηρεσίας [,)	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική συχνότητα f_i	α_i
[4 , 8)	6	5	0,1	36^o
[8 , 12)	10	15	0,3	108^o
[12 , 16)	14	10	0,2	72^o
[16 , 20)	18	20	0,4	144^o
[20 , 24)		50	1	360^o

Γ2. Πόσοι εκπαιδευτικοί έχουν συμπληρώσει τουλάχιστον 8 έτη υπηρεσίας;

Μονάδες 5

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Γ2. Οι εκπαιδευτικοί που έχουν συμπληρώσει τουλάχιστον 8 έτη υπηρεσίας, είναι :

$$v_2 + v_3 + v_4 = 15 + 10 + 20 = 45\ .$$

Γ3. Να βρείτε το ποσοστό των εκπαιδευτικών που έχουν συμπληρώσει υπηρεσία λιγότερη από 16 έτη.

Μονάδες 5

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ

Γ3. Το ποσοστό των εκπαιδευτικών που έχουν συμπληρώσει υπηρεσία λιγότερη από 16 έτη είναι :

$$f_1\% + f_2\% + f_3\% = 10 + 30 + 20 = 60 .$$

Γ4. Πόσο είναι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα;

Μονάδες 3

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Γ4. Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα, είναι ίσο με 1.

ΘΕΜΑ Δ

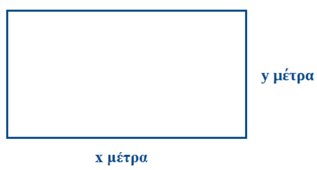
Ένα οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου έχει μήκος x μέτρα (m), πλάτος y μέτρα (m) και περίμετρο 80m.

Δ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του οικοπέδου ως συνάρτηση του x, δίνεται από τον τύπο $E(x) = -x^2 + 40x$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $E(x)$.

Μονάδες 10

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Δ1. Αν υποθέσουμε ότι έχουμε ένα οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου με μήκος x μέτρα, πλάτος y μέτρα και περίμετρο 80 μέτρα, τότε έχουμε :



$$2x + 2y = 80 . \ (1)$$

Λύνοντας, την σχέση (1) ως προς y, θα μπορέσουμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν του ορθογωνίου συναρτήσει του x, δηλαδή :

$$\begin{aligned} & 2x + 2y = 80 \\ \Leftrightarrow\ & 2y = 80 - 2x \\ \Leftrightarrow\ & y = \frac{80 - 2x}{2} \\ \Leftrightarrow\ & y = \frac{2(40 - x)}{2} \\ \Leftrightarrow\ & y = 40 - x\ . \end{aligned}$$

Επομένως, $E(x) = x \cdot y \Leftrightarrow E(x) = x\cdot(40 - x) \Leftrightarrow E(x) = -x^2 + 40x$.

Για το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, οφείλουμε να λάβουμε υπόψιν ότι τα x και y εκφράζουν τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου, συνεπώς οφείλουν και τα δύο να είναι θετικά. Δηλαδή :

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \Leftrightarrow 40 - x > 0 \Leftrightarrow x < 40 \end{cases}$$

και άρα $A_E = (0\ ,\ 40)$.

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $E(x)$ ως προς τη μονοτονία της.

Μονάδες 6

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Δ2. Η συνάρτηση E είναι παραγωγίσιμη στο $(0\ ,\ 40)$ με παράγωγο

$$E'(x) = (-x^2 + 40x)' = -2x + 40\ .$$

Έχουμε :

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 40 = 0 \Leftrightarrow -2x = -40 \Leftrightarrow x = 20$$

και έτσι, κατασκευάζοντας τον διπλανό πίνακα, συμπεραίνουμε ότι :

x	0		20		40
E΄		+	0	-	
E		↗		↘	

- η E είναι γνησίως αύξουσα στο (0 , 20]
- η E είναι γνησίως φθίνουσα στο [20 , 40).

Δ3. Για ποια τιμή του x το εμβαδόν του οικοπέδου γίνεται μέγιστο και ποια είναι η μέγιστη τιμή του;

Μονάδες 4

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Δ3. Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι το εμβαδόν του οικοπέδου, γίνεται μέγιστο για $x = 20$ m , οπότε η μέγιστη τιμή του εμβαδού είναι :

$$E(20) = -20^2 + 40 \cdot 20 = -400 + 800 = 400 \text{ m}^2 .$$

Δ4. Δύο οικόπεδα Α και Β σχήματος ορθογωνίου με περίμετρο 80m το καθένα έχουν μήκη $x_A = 29,5$m και $x_B = 34,2$m, αντίστοιχα. Να απαντήσετε αιτιολογημένα ποιο από τα δύο οικόπεδα έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.

Μονάδες 5

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Δ4.

(α΄τρόπος)

Η συνάρτηση Ε του εμβαδού του οικοπέδου, είναι γνησίως φθίνουσα στο [20 , 40) και τα μήκη $x_A = 29,5$ m και $x_B = 31,5$ m ανήκουν στο διάστημα αυτό, επομένως :

$$x_A < x_B \Leftrightarrow E(x_A) > E(x_B)$$

δηλαδή, το εμβαδόν του οικοπέδου Α είναι μεγαλύτερο.

(β΄τρόπος)

Αφού $x_A = 29,5$ m και $x_B = 31,5$ m, έχουμε :

$$y_A = 40 - 29,5 = 10,5 \text{ m} \quad \text{και} \quad y_B = 40 - 31,5 = 8,5 \text{ m}$$

οπότε, $E_A = x_A \cdot y_A = 29,5 \cdot 10,5 = 309,75 \text{ m}^2$ και $E_B = = x_B \cdot y_B = 31,5 \cdot 8,5 = 267,75 \text{ m}^2$ αντίστοιχα.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι, το εμβαδόν του οικοπέδου Α είναι μεγαλύτερο.

(γ΄τρόπος)

Θα είναι : $E(x_A) = -(29,5)^2 + 40 \cdot 29,5 = -870,25 + 1180 = 309,75 \text{ m}^2$ και

$E(x_B) = -(31,5)^2 + 40 \cdot 31,5 = -992,25 + 1260 = 267,75 \text{ m}^2$, οπότε το εμβαδόν του οικοπέδου Α είναι μεγαλύτερο.