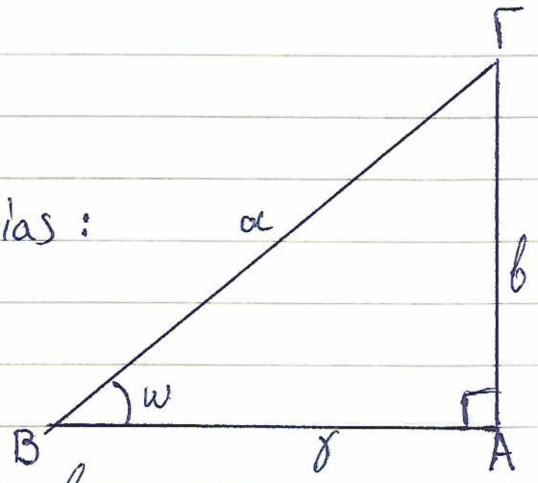
Βασική Τριγωνομετρική

Θεωρία

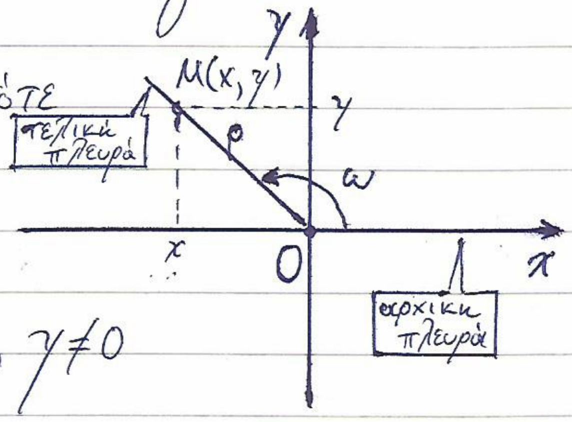


- Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας:

Έστω ότι έχουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($A = 90°$), θα είναι:

$$ημω = \frac{β}{α}, \quad συνω = \frac{γ}{α}, \quad εφω = \frac{β}{γ}, \quad σφω = \frac{γ}{β}$$

- Τριγωνομετρικοί αριθμοί οποιασδήποτε γωνίας:

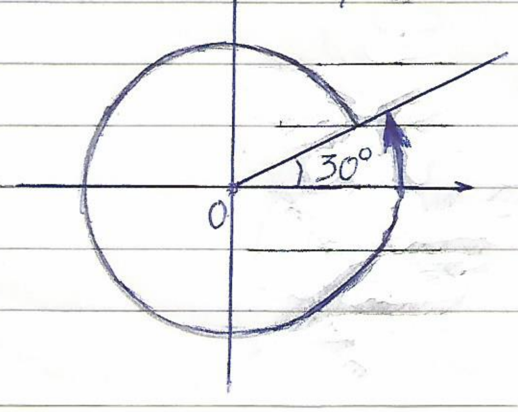


Είναι $(OM) = ρ = \sqrt{x^2 + y^2}$ οπότε

$$ημω = \frac{y}{ρ}, \quad συνω = \frac{x}{ρ}.$$

$$εφω = \frac{y}{x}, \ x \neq 0, \quad σφω = \frac{x}{y}, \ y \neq 0$$

- Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνιών μεγαλύτερων από 360° ή και αρνητικών γωνιών:



Όταν κάνουμε μία πλήρη περιστροφή, έχουμε συμπληρώσει 360°, δηλαδή μία γωνία 390° θα την περιγράφαμε ως $ω = 360° + 30°$

...με ανάλογο τρόπο ορίζονται όλες οι γωνίες που είναι μεγαλύτερες από 360° :

π.χ. $410° = 360° + 50°$

$500° = 360° + 140°$

$660° = 360° + 300°$

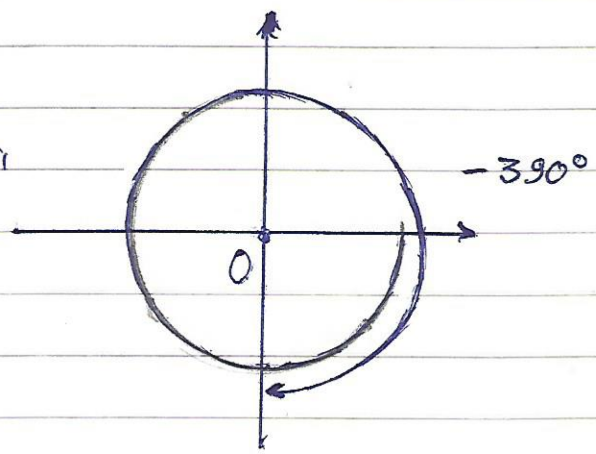
$730° = 360° + 360° + 10° = 2 \cdot 360° + 10°$

Δηλαδή, για κάθε γωνία ω μπορούμε να πούμε ότι:

$$\omega = \nu \cdot 360° + \mu°, \text{ με } \nu \in \mathbb{N} \text{ και } 0° \leq \mu° \leq 360°$$

Ακόμη, στις αρνητικές γωνία συμβαίνει κάτι παρόμοιο:

$$\omega = -(360° + 90°) = -450°$$



Γενικά, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ θα ισχύει ότι:

$$ημ(k \cdot 360° + \omega) = ημ\omega$$

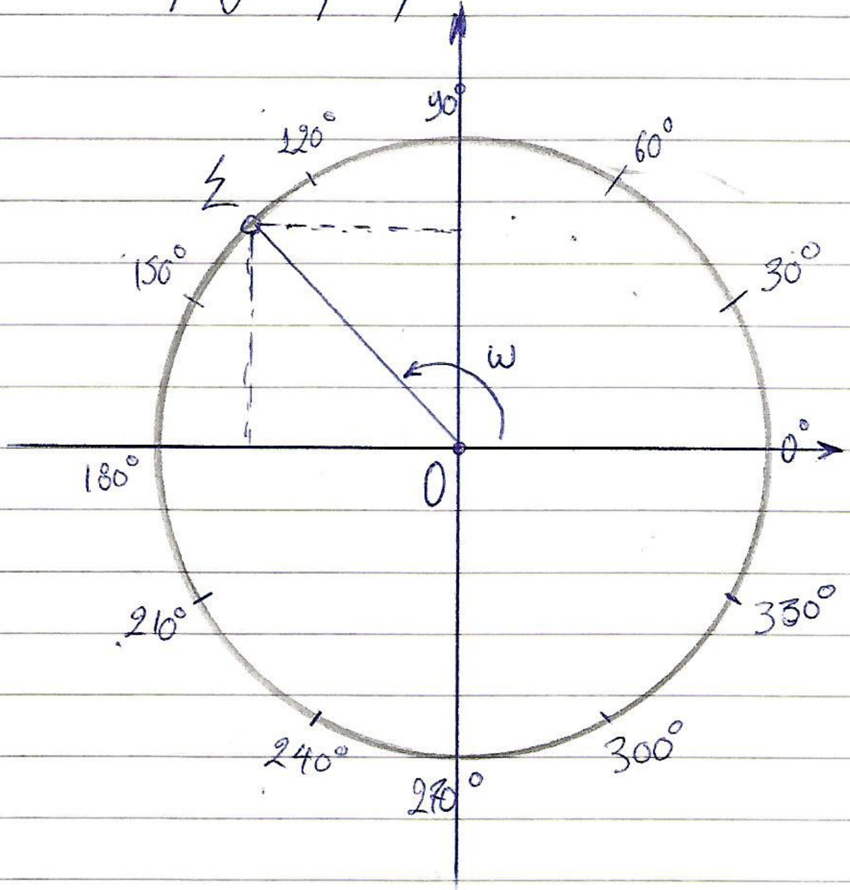
$$συν(k \cdot 360° + \omega) = συν\omega$$

$$εφ(k \cdot 360° + \omega) = εφ\omega$$

$$σφ(k \cdot 360° + \omega) = σφ\omega$$

...: Ταυτίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί αφού ταυτίζεται και η θέση των γωνιών!

Ο τριγωνομετρικός κύκλος :



Ο κύκλος με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$, λέγεται τριγωνομετρικός κύκλος.

Αν επιλέξω ένα σημείο Σ σε αυτόν τον κύκλο παρατηρούμε ότι $\rho = 1$

Άρα και $O\Sigma = 1$

... θα ισχύει δηλαδή ότι : $συνω = x$ (τετμημένη του Σ)
$ημω = y$ (τεταγμένη του Σ)

Όπως μπορούμε να καταλάβουμε, θα έχουμε τις εξής συνέπειες:

1. $-1 \leq ημω \leq 1 \Leftrightarrow |ημω| \leq 1$ ΚΑΙ $-1 \leq συνω \leq 1 \Leftrightarrow |συνω| \leq 1$

2. Τα πρόσημα των τριγωνομετρικών αριθμών θα εξαρτώνται από το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκονται

	1º	2º	3º	4º
ημω	+	+	−	−
συνω	+	−	−	+
εφω	+	−	+	−
σφω	+	−	+	−

Ο Η Ε Σ

- Το ακτίνιο ως μονάδα μέτρησης: ακτίνιο (ή 1 rad) είναι η γωνία η οποία όταν γίνει επίκεντρη σε έναν κύκλο, βαίνει σε τόξο ενός ακτινίου (ή 1 rad)

...εάν τώρα μια γωνία είναι μ° και α rad, θα έχουμε την σχέση:

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180^\circ}$$ ή ότι $360^\circ = 2\pi$ rad

- Γνωστοί τριγωνομετρικοί αριθμοί:

0°	0	0	1	0	ΔΕΝ ΟΡΙΖΕΤΑΙ
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	ΔΕΝ ΟΡΙΖΕΤΑΙ	0
γωνία σε μοίρες	γωνία σε rad	ημίτονο	συνημίτονο	εφαπτομένη	συνεφαπτομένη

• Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες:

- $ημ^2ω + συν^2ω = 1 \iff ημ^2ω = 1 - συν^2ω$

  $\iff συν^2ω = 1 - ημ^2ω$

- $εφω = \dfrac{ημω}{συνω}$ ΚΑΙ $σφω = \dfrac{συνω}{ημω}$

- $εφω \cdot σφω = 1 \iff εφω = \dfrac{1}{σφω}$

  $\iff σφω = \dfrac{1}{εφω}$

- $συν^2ω = \dfrac{1}{1+εφ^2ω}$

- $ημ^2ω = \dfrac{εφ^2ω}{1+εφ^2ω}$

Αναγωγή στο 1^{ο} τεταρτημόριο :

- Οι **αντίθετες** γωνίες: $-\omega$, ω έχουν ίδιο συνημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

$$ημ(-\omega) = -ημ\omega \qquad συν(-\omega) = συν\omega$$

$$εφ(-\omega) = -εφ\omega \qquad σφ(-\omega) = -σφ\omega$$

- Οι **παραπληρωματικές** γωνίες: $\pi-\omega$, ω έχουν ίδιο **ημίτονο** και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

$$ημ(\pi-\omega) = -ημ\omega \qquad συν(\pi-\omega) = -συν\omega$$

$$εφ(\pi-\omega) = -εφ\omega \qquad σφ(\pi-\omega) = -σφ\omega$$

- Οι **συμπληρωματικές** γωνίες: $\frac{\pi}{2}-\omega$, ω **εναλλάσσουν** τους τριγωνομετρικούς τους αριθμούς.

$$ημ\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right) = συν\omega \qquad συν\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right) = ημ\omega$$

$$εφ\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right) = σφ\omega \qquad σφ\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right) = εφ\omega$$

- Όσες γωνίες **διαφέρουν κατά π** : $\pi+\omega$, ω έχουν την ίδια **εφαπτομένη** και **συνεφαπτομένη**.

$$ημ(\pi+\omega) = -ημ\omega \qquad συν(\pi+\omega) = -συν\omega$$

$$εφ(\pi+\omega) = εφ\omega \qquad σφ(\pi+\omega) = σφ\omega$$