Αποδείξεις
(Μέρος 2^{ο})

Δείτε το βίντεο στο YouTube κάνοντας κλικ εδώ!

Επιμέλεια : Χαράλαμπος Καραγιαννίδης

1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$, είναι $f'(x) = c$.

Απόδειξη

Έχουμε ότι

$$f(x+h)-f(x) = c-c = 0$$

και για $h \neq 0$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0 ,$$

οπότε

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0 .$$

Άρα $\mathbf{(c)' = 0}$.

2. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x) = x$, είναι $f'(x) = 1$.

Απόδειξη

Έχουμε ότι

$$f(x+h)-f(x) = (x+h)-x = h$$

και για $h \neq 0$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{h}{h} = 1 ,$$

επομένως

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1 .$$

Άρα $\mathbf{(x)' = 1}$.

3. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x^2$, είναι $f'(x) = 2x$.

Απόδειξη

Έχουμε ότι

$$f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - x^2 = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = 2xh + h^2 = h(2x+h),$$

και για $h \neq 0$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{h(2x+h)}{h} = 2x + h,$$

επομένως

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x.$$

Άρα $\boldsymbol{(x^2)' = 2x}$.

« Αποδεικνύεται ότι $\boldsymbol{(x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}}$, όπου ν φυσικός αριθμός »

« Ο τύπος αυτός ισχύει και στην περίπτωση όπου ο εκθέτης είναι ρητός αριθμός.

Άρα $\boldsymbol{(x^\rho)' = \rho x^{\rho-1}}$, όπου ρ ρητός αριθμός »

4. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σύνολο Α και c ένας σταθερός πραγματικός αριθμός, να αποδείξετε ότι :

$$\boldsymbol{(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)}.$$

Απόδειξη

Έστω η συνάρτηση $F(x) = c \cdot f(x)$.

Έχουμε ότι

$$F(x+h) - F(x) = c \cdot f(x+h) - c \cdot f(x) = c \cdot [f(x+h) - f(x)],$$

και για $h \neq 0$

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{c \cdot [f(x+h) - f(x)]}{h} = c \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

επομένως

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\left[c \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] = c \cdot f'(x).$$

Άρα $\boldsymbol{(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)}$.

5. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες σε ένα σύνολο Α, να αποδείξετε ότι :

$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x) \;.$$

Απόδειξη

Έστω η συνάρτηση $F(x)=f(x)+g(x)$.

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} F(x+h)-F(x) &= [\,f(x+h)+g(x+h)\,]-[\,f(x)+g(x)\,] \\ &= f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x) \\ &= [\,f(x+h)-f(x)\,]+[\,g(x+h)-g(x)] \end{aligned}$$

και για $h \neq 0$

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \;.$$

Επομένως

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x)+g'(x)\,.$$

Άρα $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$.

6. Έστω x_1 , x_2 , … , x_κ οι τιμές μιας μεταβλητής Χ ενός δείγματος μεγέθους ν, όπου κ, ν μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με $\kappa \leq \nu$. Για την σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i , i = 1, 2, …, κ να αποδείξετε ότι :

$$0 \leq f_i \leq 1$$

Απόδειξη

Έχουμε

$$0 \leq f_i \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\nu_i}{\nu} \leq 1 \Leftrightarrow \nu\cdot 0 \leq \nu\cdot\frac{\nu_i}{\nu} \leq \nu\cdot 1 \Leftrightarrow 0 \leq \nu_i \leq \nu$$

κάτι που ισχύει .

7. Έστω x_1 , x_2 , … , x_κ οι τιμές μιας μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους ν, όπου κ, ν μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με κ ≤ ν . Για την σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i , i = 1, 2, …, κ να αποδείξετε ότι :

$$f_1+f_2+\ldots+f_\kappa=1$$

Απόδειξη

Έχουμε

$$f_1+f_2+\ldots+f_\kappa=\frac{\nu_1}{\nu}+\frac{\nu_2}{\nu}+\ldots+\frac{\nu_\kappa}{\nu}=\frac{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_\kappa}{\nu}=\frac{\nu}{\nu}=1\,.$$

8. Έστω x_1 , x_2 , … , x_κ οι τιμές μιας μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους ν, όπου κ, ν μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με κ ≤ ν . Για την σχετική συχνότητα f_i % της τιμής x_i, i = 1,2,…, κ να αποδείξετε ότι :

$$f_1\%+f_2\%+\ldots+f_\kappa\%=100$$

Απόδειξη

Έχουμε

$$\begin{aligned} f_1\%+f_2\%+\ldots+f_\kappa\% &= 100\cdot f_1+100\cdot f_2+\ldots+100\cdot f_\kappa \\ &= 100\cdot\left(\frac{\nu_1}{\nu}+\frac{\nu_2}{\nu}+\ldots+\frac{\nu_\kappa}{\nu}\right)=100\cdot\left(\frac{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_\kappa}{\nu}\right)=100\left(\frac{\nu}{\nu}\right)=100\,. \end{aligned}$$