ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

2ο Κριτήριο Αξιολόγησης

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με **Σωστό** εάν η πρόταση είναι σωστή ή με **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Αν μια συνάρτηση παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα που παρουσιάζει .

ΣΩΣΤΟ

ii. Το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = ημx$ είναι το διάστημα $[-1\ ,\ 1]$.

ΣΩΣΤΟ

iii. Το σημείο Μ(α , β) ανήκει στην καμπύλη μιας συνάρτησης f, άν και μόνο αν $f(α) = β$.

ΣΩΣΤΟ

iv. Εάν υπάρχει $x_0 \in A$ τέτοιο ώστε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ τότε η f δεν είναι συνεχής .

ΣΩΣΤΟ

v. Μία συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού το Α, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο, όταν ισχύει $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε x που ανήκει σε μια περιοχή του x_0 .

ΣΩΣΤΟ

Α2. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται συνεχής ;

- *Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέγεται συνεχής, αν για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει :*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)\ .$$

Α3. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0 \in A$;

- *Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α, λέμε ότι παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 \in A$ όταν $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in A$.*

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + αx + β$ και $g(x) = λx + γ$.

Β1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g .

- *Οι συναρτήσεις f και g έχουν για πεδίο ορισμού το R ως πολυωνυμικές, δηλαδή $D_f = D_g = R$.*

Β2. Να βρεθούν τα $α, β \in R$ ώστε η γραφική παράσταση της f να τέμνει τον άξονα x'x στο 2 και τον άξονα y'y στο 4 .

- *Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον x'x στο 2 και τον y'y στο 4, αυτό σημαίνει ότι τα σημεία Α(2,0) και Β(0,4) αποτελούν σημεία της και άρα f(2) = 0 και f(0) = 4 .*
  Ας πάρουμε την πρώτη σχέση,
  $$f(2)=0 \Leftrightarrow 2^2+\alpha\cdot 2+\beta = 0 \Leftrightarrow 4+2\alpha+\beta=0 \quad (1)$$
  Ενώ από την δεύτερη ισότητα προκύπτει ότι,
  $$f(0)=4 \Leftrightarrow 0^2+\alpha\cdot 0+\beta=4 \Leftrightarrow \underline{\beta=4}$$
  Επομένως αν αντικαταστήσουμε το β στην (1) θα έχουμε,
  $$4+2a+4=0 \Leftrightarrow 2a=-8 \Leftrightarrow \underline{a=-4}$$
  Η f λοιπόν γράφεται ως, $f(x) = x^2 - 4x + 4$.

Β3. Εάν η C_g είναι παράλληλη στον x'x και το σημείο Σ(2021 , 4) ανήκει σε αυτήν, να βρεθούν τα $\lambda, \gamma \in R$.

- *Η C_g είναι παράλληλη στον x'x και άρα ο συντελεστής διεύθυνσής της θα είναι $\underline{\lambda = 0}$.*
  Επιπλέον διέρχεται από το σημείο Σ(2021,4) και συνεπώς g(2021) = 4,
  $$\Leftrightarrow 0\cdot 2021+\gamma=4 \Leftrightarrow \underline{\gamma=4}$$
  Η συνάρτηση g λοιπόν γράφεται ως, g(x) = 4 .

Β4. Να βρεθούν τα κοινά σημεία των C_f και C_g εάν α = –4 , β = 4, λ = 0 και γ = 4.

- *Τα κοινά σημεία των C_f και C_g θα έχουν τετμημένες τις λύσεις της εξίσωσης f(x) = g(x) δηλαδή θα έχουμε,*
  $$x^2-4x+4=4 \Leftrightarrow x^2-4x=0 \Leftrightarrow x(x-4)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x-4=0 \Leftrightarrow \underline{x=0} \text{ ή } \underline{x=4}$$
  Για x = 0 θα έχουμε f(0) = g(0) = 4 και για x = 4 θα έχουμε f(4) = g(4) = 4 επομένως τα σημεία τομής των δύο γραφικών παραστάσεων θα είναι τα Α(0,4) και Β(4,4) .

Β5. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων
$$\varphi(x) = \frac{g(x)}{f(x)} \quad \text{και} \quad h(x) = \sqrt{f(x)}$$

- *Για να ορίζεται η φ(x) θα πρέπει*
  $f(x)\neq 0 \Leftrightarrow x^2-4x+4\neq 0 \Leftrightarrow (x-2)^2\neq 0 \Leftrightarrow x-2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0$ *και άρα* $D_f = \mathbb{R}-(0)$.
- *Για να ορίζεται η h(x) θα πρέπει*
  $h(x)\geq 0 \Leftrightarrow x^2-4x+4\geq 0 \Leftrightarrow (x-2)^2\geq 0$ *πάντα αληθής και συνεπώς* $D_h = \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{3x^2-15x}{x^2-25}$, $g(x) = \dfrac{x^2-8x+16}{x-4}$, $h(x) = \dfrac{x^2-x-6}{x^3-27}$ και $z(x) = \dfrac{x^2-81}{\sqrt{x-5}-2}$.

Γ1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των δοθέντων συναρτήσεων .

- *Η συνάρτηση f ορίζεται όταν*
  $x^2-25\neq 0 \Leftrightarrow (x-5)(x+5)\neq 0 \Leftrightarrow x-5\neq 0 \text{ ή } x+5\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -5 \text{ ή } x\neq 5 \Leftrightarrow D_f=\mathbb{R}-(-5\ ,\ 5)$
- *Η συνάρτηση g ορίζεται όταν*
  $x-4\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 4 \Leftrightarrow D_g=\mathbb{R}-(4)$

- *Η συνάρτηση h ορίζεται όταν*
  $x^3-27\neq 0 \Leftrightarrow x^3\neq 27 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{27} \Leftrightarrow x=3 \Leftrightarrow D_h=\mathbb{R}-(3)$
- *Η συνάρτηση z ορίζεται όταν*
  $x-5\geq 0$ *και* $\sqrt{x-5}-2\neq 0 \Leftrightarrow x\geq 5$ *και* $\sqrt{x-5}\neq 2 \Leftrightarrow x\geq 5$ *και* $x-5\neq 4$ $x\geq 5$ *και* $x\neq 9$
  και συνεπώς $D_z = [5, +\infty) - \{9\}$.

Γ2. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$.

- Θα έχουμε,

$$\lim_{x\to 5} f(x) = \lim_{x\to 5}\frac{3x^2-15x}{x^2-25} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 5}\frac{3x(x-5)}{(x-5)(x+5)} = \lim_{x\to 5}\frac{3x}{x+5} = \frac{3\cdot 5}{5+5} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}\,.$$

Γ3. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 4} g(x)$.

- Θα έχουμε,

$$\lim_{x\to 4} g(x) = \lim_{x\to 4}\frac{x^2-8x+16}{x-4} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 4}\frac{(x-4)^2}{x-4} = \lim_{x\to 4}(x-4) = 4-4 = 0\,.$$

Γ4. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 3} h(x)$.

- Θα έχουμε λοιπόν,

$$\lim_{x\to 3} h(x) = \lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^3-27} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x^2+3x+9)} = \lim_{x\to 3}\frac{x+2}{x^2+3x+9} = \frac{3+2}{3^2+3\cdot 3+9} = \frac{5}{27}\,.$$

Σχήμα Horner

1	-1	-6	ρ =3
↓	3	6	
1	2	0	

Γ5. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 9} z(x)$.

- Θα έχουμε λοιπόν,

$$\lim_{x\to 9} z(x) = \lim_{x\to 9}\frac{x^2-81}{\sqrt{x-5}-2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 9}\frac{(x-9)(x+9)(\sqrt{x-5}+2)}{(\sqrt{x-5}-2)(\sqrt{x-5}+2)} = \lim_{x\to 9}\frac{(x-9)(x+9)(\sqrt{x-5}+2)}{(\sqrt{x-5})^2-2^2}$$

$$= \lim_{x\to 9}\frac{(x-9)(x+9)(\sqrt{x-5}+2)}{x-5-4} = \lim_{x\to 9}\frac{(x-9)(x+9)(\sqrt{x-5}+2)}{x-9} = \lim_{x\to 9}(x+9)(\sqrt{x-5}+2)$$

$$= (9+9)(\sqrt{9-5}+2) = 18\cdot 4 = 72\,.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x-12}{x-3} & ,\ \text{αν } x\neq 3 \\ \lambda+3 & ,\ \text{αν } x=3 \end{cases}$

Δ1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.

- *Η f ορίζεται τόσο για* $x \neq 3$ *όσο και για* $x = 3$ *, επομένως το πεδίο ορισμού της θα είναι όλο το* $\mathbb{R}$.

Δ2. Να δειχθεί ότι $f(0) - f(3) = -\lambda + 1$.

- *Θα έχουμε ,*

$$f(0) - f(3) = \frac{0^2 + 0 - 12}{x - 3} - (\lambda + 3) = \frac{-12}{-3} - \lambda - 3 = 4 - \lambda - 3 = -\lambda + 1 \text{ αποδείχθηκε .}$$

Δ3. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 3$, να βρεθεί το λ .

- *Η f είναι συνεχής στο 3 αν και μόνο αν* $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$

Θα έχουμε $\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 + x - 12}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+4)}{x-3} = \lim_{x \to 3} (x+4) = 3 + 4 = 7$,

επομένως $\lambda + 3 = 7 \Leftrightarrow \underline{\lambda = 4}$.

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4(-12) = 25$

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2} = \begin{array}{l} \to -4 \\ \to 3 \end{array}$

Δ4. Εάν λ = 4 , να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο Ζ(f(3) , 0) και σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία ίση με 135^o .

- *Θα έχουμε f(3) = 4 + 3 = 7, συνεπώς η ευθεία θα διέρχεται από το σημείο (7,0).*
Επιπλέον γνωρίζουμε ότι κάθε ευθεία έχει εξίσωση της μορφής (ε) : y = αx + β
όπου α, ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ο οποίος ισούται με την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζεται ανάμεσα στην ευθεία και τον άξονα x'x, δηλαδή α = εφ135º = – 1.
Για να ανήκει λοιπό το σημείο Ζ(7,0) στην ευθεία θα πρέπει

$$0 = -1 \cdot 7 + \beta \Leftrightarrow \underline{\beta = 7}$$

δηλαδή η ζητούμενη ευθεία θα είναι η (ε) : y = – x + 7 .

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ : ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ ΚΑΡΑΓΙΑΝΝΙΔΗΣ
(7MATHS)

“ επιτυχία είναι το να πηγαίνεις από την μία αποτυχία στην άλλη, χωρίς να χάνεις τον ενθουσιασμό σου ”

Winston Churchill