ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

2ο Κριτήριο Αξιολόγησης

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με **Σωστό** εάν η πρόταση είναι σωστή ή με **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Αν f και g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού Α και Β αντίστοιχα, τότε η $g \circ f$ ορίζεται, αν $f(A) \cap B \neq \varnothing$
ΣΩΣΤΟ

ii. Μία συνάρτηση $\boldsymbol{f}$ είναι 1-1, αν και μόνο αν, για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της, εξίσωση $y = f(x)$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x.
ΣΩΣΤΟ

iii. Μια συνάρτηση της μορφής $\boldsymbol{f}(x) = \alpha$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$, έχει μονοσύνολο για σύνολο τιμών.
ΣΩΣΤΟ

iv. Αν μία συνάρτηση $\boldsymbol{f}$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα [α,β], τότε η $\boldsymbol{f}$ παίρνει μία μέγιστη τιμή Μ και μία ελάχιστη τιμή m.
ΣΩΣΤΟ

v. Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης $\boldsymbol{f}$ είναι συμμετρική ως προς τον άξονα y'y.
ΣΩΣΤΟ

Α2. Πότε δύο συναρτήσεις $\boldsymbol{f}$ και $\boldsymbol{g}$ λέγονται ίσες ;

- *Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν :*
- *έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και*
- *για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.*

Α3. Πότε μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 \in A$;

- *Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ ολικό μέγιστο το $f(x_0)$, όταν $\boldsymbol{f(x) \leq f(x_0)}$ για κάθε $x \in A$.*

ΘΕΜΑ Β

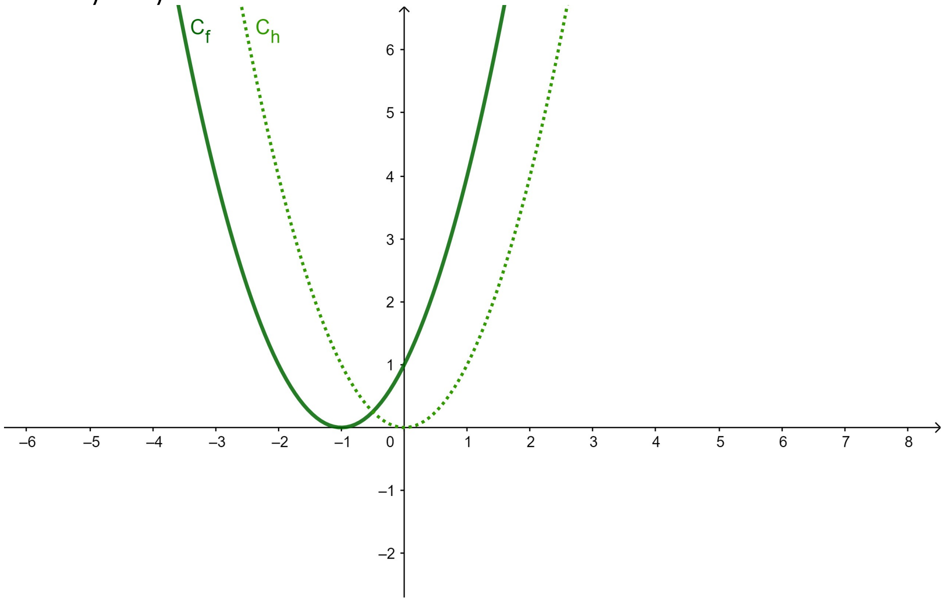
Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = (x+1)^2$ και $g(x) = \sqrt{x} - 1$

Β1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g

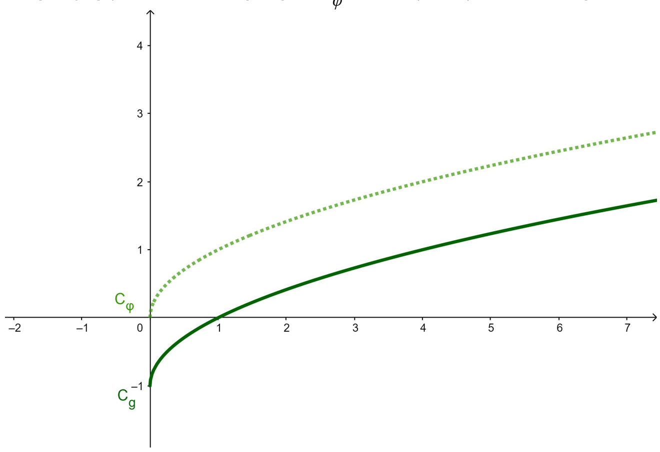
- *Ως πολυωνυμική η συνάρτηση f θα έχει πεδίο ορισμού όλο το R, δηλαδή $D_f = R$.*
- *Για να ορίζεται η ρίζα στην συνάρτηση g θα πρέπει $x \geq 0$ και συνεπώς $D_g = [0, +\infty)$.*

B2. Να παραστηθούν γραφικά οι C_f και C_g.

- *Η C_f προκύπτει από την οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $h(x) = x^2$ κατά μία μονάδα αριστερά*



- *Η συνάρτηση g μπορεί να γραφεί ως η σύνθεση $g(x) = \varphi(x) – 1$ όπου $\varphi(x) = \sqrt{x}$, επομένως αποτελεί την κατακόρυφη μετατόπιση της C_φ κατά μία μονάδα προς τα κάτω*



B3. Να μελετηθούν ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα οι C_f και C_g.

- *Όπως παρατηρούμε στην γραφική της παράσταση, η συνάρτηση f :*
  - *είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty , –1]$*
  - *είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[–1 , +\infty)$*
  - *παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο – 1, το $f(–1) = 0$*

- *Από την καμπύλη της συνάρτησης g, προκύπτει ότι :*
  - *είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$*
  - *παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο 0, το $g(0) = 0$.*

B4. Επιβεβαιώστε αλγεβρικά την απάντησή σας.

- *Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = R$.*
  - *Για $x_1, x_2 \in (-\infty , -1)$ με $x_1 < x_2$ θα έχουμε $x_1 + 1 < x_2 + 1 \Leftrightarrow (x_1 + 1)^2 > (x_2 + 1)^2$*

$\Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$ *επομένως* $f \downarrow (-\infty\,,\,-1)$.

- *Για* $x_1, x_2 \in (-1\,,\,+\infty)$ *με* $x_1 < x_2$ *θα έχουμε* $x_1 + 1 < x_2 + 1 \Leftrightarrow (x_1 + 1)^2 < (x_2 + 1)^2$
  $\Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ *επομένως* $f \uparrow (-1\,,\,+\infty)$.
- *Επιπλέον, για κάθε* $x \in R$ *θα είναι* $(x + 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq f(-1)$
  αφού $f(-1) = (-1 + 1)^2 = 0$, *επομένως η* f *παρουσιάζει ελάχιστο στο* -1 *το* $f(-1) = 0$.

- *Η συνάρτηση g έχει πεδίο ορισμού* $B = [0\,,\,+\infty)$.
  Για κάθε $0 \leq x_1 < x_2$ *θα έχουμε* $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \Leftrightarrow \sqrt{x_1} - 1 < \sqrt{x_2} - 1 \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2)$
  και συνεπώς $g \uparrow R$.
  Επιπλέον για κάθε $x \geq 0$ *έχουμε* $\sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 \geq -1 \Leftrightarrow g(x) \geq g(0)$
  αφού $g(0) = \sqrt{0} - 1 = -1$, *επομένως η g παρουσιάζει ελάχιστο στο 0, το* $g(0) = -1$.

Β5. Να προσδιοριστούν οι συναρτήσεις $g \circ f$ και $f \circ g$.

- *Για να ορίζεται η* $g \circ f$ *θα πρέπει* $x \in D_f$ *και* $f(x) \in D_g$ *επομένως*
  $x \in R$ *και* $(x + 1)^2 \geq 0$ *το οποίο ισχύει πάντοτε. δηλαδή* $D_{g \circ f} = R$.
  Θα έχουμε λοιπόν $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{(x + 1)^2} - 1 = |x + 1| - 1$
  $= \begin{cases} x\,, & \text{όταν } x \geq -1 \\ -x - 2\,, & \text{όταν } x < -1 \end{cases}$.

- *Για να ορίζεται η* $f \circ g$ *θα πρέπει* $x \in D_g$ *και* $g(x) \in D_f$ *επομένως*
  $x \geq 0$ *και* $(\sqrt{x} - 1) \in R$ *το οποίο αληθεύει, δηλαδή* $D_{f \circ g} = [0\,,\,+\infty)$
  Θα έχουμε λοιπόν $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x} - 1 + 1)^2 = (\sqrt{x})^2 = x$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις
$f : (1\,,\,+\infty) \to \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = \dfrac{x + 2}{x - 1}$ και
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με τύπο $g(x) = e^x - 1$.

Γ1. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση g είναι 1-1.

- *Η g έχει πεδίο ορισμού* $D_g = R$.
  Για κάθε λοιπόν $x_1, x_2 \in R$ *με* $g(x_1) = g(x_2)$ *έχουμε :*
  $g(x_1) = g(x_2) \Leftrightarrow e^{x_1} - 1 = e^{x_2} - 1 \Leftrightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$
  συνεπώς η συνάρτηση g *είναι* $1-1$.

Γ2. Να βρεθεί η αντίστροφη της f.

- *Για να μπορέσουμε να βρούμε την αντίστροφη της f, οφείλουμε αρχικά να δείξουμε ότι αντιστρέφεται.*
  Η f είναι ορισμένη στο διάστημα $(1\,,\,+\infty)$.
  Για κάθε λοιπόν $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ *με* $f(x_1) = f(x_2)$ *έχουμε :*

$$\frac{x_1+2}{x_1-1}=\frac{x_2+2}{x_2-1} \Leftrightarrow (x_1+2)(x_2-1)=(x_2+2)(x_1-1)$$

$$\Leftrightarrow x_1x_2-x_1+2x_2-2=x_1x_2-x_2+2x_1-2 \Leftrightarrow 3x_2=3x_1 \Leftrightarrow x_2=x_1$$

συνεπώς η συνάρτηση f είναι 1-1 και άρα αντιστρέφεται.

Για κάθε $x>1$ *έχουμε* $f(x)=y \Leftrightarrow \dfrac{x+2}{x-1}=y \Leftrightarrow (x-1)y=x+2 \Leftrightarrow xy-y=x+2$

$$\Leftrightarrow xy-x=y+2 \Leftrightarrow x(y-1)=y+2 \Leftrightarrow x=\frac{y+2}{y-1} \quad , \text{με } y>1$$

Είναι $f(x)=y \Leftrightarrow x=f^{-1}(y) \Leftrightarrow f^{-1}(y)=\dfrac{y+2}{y-1}$ *, με* $y>1$.

Άρα η $f^{-1}(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$ $\quad , x>1$.

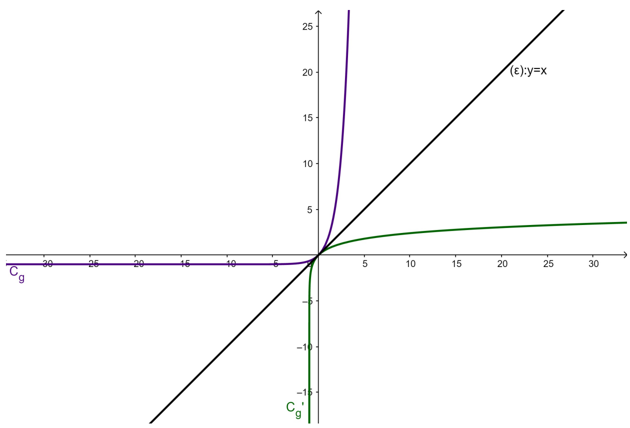
Γ3. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιαστούν οι C_g και $C_{g^{-1}}$ και με την βοήθεια αυτών να βρεθούν τα κοινά τους σημεία.

- *Στο πρώτο ερώτημα δείξαμε ότι η συνάρτηση g είναι 1-1 και συνεπώς αντιστρέφεται.*

  Για κάθε $x \in R$ *έχουμε* $g(x)=y \Leftrightarrow e^x-1=y \Leftrightarrow e^x=y+1 \Leftrightarrow x=ln(y+1) \quad , y>-1$

  Είναι $g(x)=y \Leftrightarrow x=g^{-1}(y) \Leftrightarrow g^{-1}(y)=ln(y+1)$ *, με* $y>-1$.

  Οι C_g *και* $C_{g^{-1}}$ *φαίνονται λοιπόν στο διπλανό σχήμα όπου παρατηρούμε πως έχουν κοινό σημείο το O(0,0).*



Γ4. Να λυθεί η εξίσωση $e^x-3=\dfrac{x+2}{x-1}$ στο $\Delta=(-\infty\ ,\ 1)$.

- *Ορίζοντας την συνάρτηση h(x) =* $e^x-3-\dfrac{x+2}{x-1} \Leftrightarrow h(x)=e^x-4-\dfrac{3}{x-1} \quad , x<1$

  παρατηρούμε ότι η προφανής της ρίζα είναι η h(0) = 0 και επειδή η $h \uparrow (-\infty, 1)$

  [αποδεικνύεται με τον γνωστό τρόπο "για κάθε $x_1<x_2<1$ *…* $h(x_1)<h(x_2)$*"]*

  αυτή η ρίζα θα είναι μοναδική! Επομένως η λύση της δοσμένης εξίσωσης είναι x = 0 .

Γ5. Να λυθεί η ανίσωση $-2x^2-4<\ln\dfrac{3x^2+5}{x^2+1}$.

- *Από την δοσμένη ανίσωση έχουμε ισοδύναμα*

$-3x^2 + x^2 - 5 + 1 < ln(3x^2 + 5) - ln(x^2 + 1)$

$\Leftrightarrow\ ln(x^2 + 1) + x^2 + 1 < ln(3x^2 + 5) + 3x^2 + 5 \qquad (1)$

Θεωρούμε την συνάρτηση $\varphi(x) = lnx + x$ *με* $x > 0$ *όπου εύκολα προκύπτει ότι είναι γνησίως αύξουσα και άρα* $(1) \Leftrightarrow \varphi(x^2 + 1) < \varphi(3x^2 + 5) \Leftrightarrow x^2 + 1 < 3x^2 + 5 \Leftrightarrow 2x^2 + 4 > 0$ *το οποίο αληθεύει για κάθε τιμή του R.*

ΘΕΜΑ Δ

Έστω γνησίως μονότονη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία Α(2 , 5) και Β(4 , 2) .

Δ1. Να δειχθεί ότι αντιστρέφεται.

- *Η f αποτελεί γνησίως μονότονη συνάρτηση, επομένως είναι 1-1 και άρα αντιστρέφεται.*

Δ2. Να βρεθεί το είδος της μονοτονίας της f.

- *Γνωρίζουμε ότι η* C_f *διέρχεται από τα σημεία A(2,5) και B(4,2), δηλαδή f(2) = 5 και f(4) = 2, επομένως με* $2 < 4 \Leftrightarrow f(2) > f(4)$ *και άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R.*

Δ3. Να λυθεί η εξίσωση $f(f(x^2 - 5) + x^3 - 1) - f(x^3 + 1) = 0$.

- *Θα έχουμε ισοδύναμα* $f(f(x^2 - 5) + x^3 - 1) = f(x^3 + 1) \overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow} f(x^2 - 5) + x^3 - 1 = x^3 + 1$

$\Leftrightarrow f(x^2 - 5) = 2 \Leftrightarrow f(x^2 - 5) = f(4) \Leftrightarrow x^2 - 5 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$.

Δ4. Να λυθεί η ανίσωση $f(f(|x| - 4) - 1) < f^{-1}(5)$.

- *Γνωρίζουμε ότι f (2) = 5, επομένως* $f^{-1}(5) = 2$ *και άρα η ανίσωση γράφεται*

$f(f(|x| - 4) - 1) < 2 \Leftrightarrow f(f(|x| - 4) - 1) < f(4) \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(|x| - 4) - 1 > 2$

$\Leftrightarrow f(|x| - 4) > 5 \Leftrightarrow f(|x| - 4) > f(2) \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} |x| - 4 < 2 \Leftrightarrow |x| < 6 \Leftrightarrow -6 < x < 6$.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ : ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ ΚΑΡΑΓΙΑΝΝΙΔΗΣ
(7MATHS)

“ επιτυχία είναι το να πηγαίνεις από την μία αποτυχία στην άλλη, χωρίς να χάνεις τον ενθουσιασμό σου “

Winston Churchill