ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1ο Κριτήριο Αξιολόγησης

ΘΕΜΑ Α

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με **Σωστό** εάν η πρόταση είναι σωστή ή με **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

Α1. Συνάρτηση, $f: A \rightarrow B$ λέγεται η διαδικασία κατά την οποία, κάποια στοιχεία του συνόλου Α, αντιστοιχίζονται σε στοιχεία του συνόλου Β.

ΛΑΘΟΣ *διότι από τον ορισμό γνωρίζουμε ότι συνάρτηση είναι η διαδικασία κατά την οποία κάθε στοιχείο ενός συνόλου Α, αντιστοιχίζεται σε μοναδικό στοιχείο του συνόλου Β.*

Α2. Το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης είναι πάντοτε υποσύνολο του R.

ΣΩΣΤΟ *στις πραγματικές συναρτήσεις με τις οποίες ασχολούμαστε, το πεδίο ορισμού είναι πάντοτε υποσύνολο του R.*

Α3. Σε μία σταθερή συνάρτηση, πεδίο ορισμού είναι όλο το R.

ΣΩΣΤΟ *η σταθερή συνάρτηση της μορφής f(x) = c, όπου c ένας σταθερός αριθμός, δεν παύει να αποτελεί πολυωνυμική συνάρτηση και ως τέτοια, έχει για πεδίο ορισμού όλο το R.*

Α4. Μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο Α και αντιστοίχως μία συνάρτηση g είναι ορισμένη σε ένα σύνολο Β. Τότε η συνάρτηση αθροίσματος $S = f + g$ θα ορίζεται στο διάστημα AUB.

ΛΑΘΟΣ *για να ορίζονται πράξεις ανάμεσα σε συναρτήσεις θα πρέπει* $A \cap B \neq \emptyset$.

Α5. Το σημείο $Z(x_0, y_0)$ ανήκει στην καμπύλη μιας συνάρτησης f αν και μόνο αν $f(x_0) = y_0$.

ΣΩΣΤΟ *ένα σημείο ανήκει στην καμπύλη μιας συνάρτησης, αν και μόνο αν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την συνάρτηση.*

Α6. Το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f, περιλαμβάνει όλες τις τετμημένες των σημείων της γραφικής της παράστασης.

ΛΑΘΟΣ *το σύνολο τιμών περιλαμβάνει όλες τις τεταγμένες των σημείων που ανήκουν στην καμπύλη μιας συνάρτησης.*

Α7. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι ορισμένες στο σύνολο Α, τότε η συνάρτηση $R = \frac{f}{g}$ είναι επίσης ορισμένη στο σύνολο Α.

ΛΑΘΟΣ *διότι από το σύνολο Α, θα πρέπει να εξαιρεθούν οι τιμές οι οποίες μηδενίζουν την συνάρτηση g.*

Α8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = αx+β$ ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν η γωνία που σχηματίζεται ανάμεσα στην C_f και τον x'x είναι 120^o τότε η f θα είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ.

ΣΩΣΤΟ *όταν η ευθεία σχηματίζει γωνία 120^o με τον άξονα x'x τότε θα είναι στην μορφή (ε): $y = -\sqrt{3}x + β$ αφού θα έχει για συντελεστή $α = εφ120^o = -\sqrt{3}$ και όπως γνωρίζουμε μία ευθεία με αρνητικό συντελεστή είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα* $Δ \subseteq R$.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Α9. Η καμπύλη μιας συνάρτησης f τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο $(0, f(0))$.
ΣΩΣΤΟ *η καμπύλη μιας συνάρτησης τέμνει τον άξονα y'y όταν x = 0, αρκεί φυσικά η τιμή 0 να ανήκει στο πεδίο ορισμού της.*

Α10. Ένα τοπικό ελάχιστο σε μία συνάρτηση δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό μέγιστο αυτής.
ΛΑΘΟΣ *ένα τοπικό ελάχιστο θα μπορούσε να είναι μεγαλύτερο από κάποιο τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης.*

$(\mathbf{2{,}5 \cdot 10 = 25}$ **μονάδες**$)$

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(\mathrm{x}) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{x}}{\mathrm{x}-1}, & \mathrm{x} < 1 \\ \sqrt{\mathrm{x}^2 - 2\mathrm{x} + 1}, & \mathrm{x} \geq 1 \end{cases}$, $g(\mathrm{x}) = \dfrac{\alpha \mathrm{x}}{\mathrm{x}^2 - 5\mathrm{x} + 6}$

και $h(\mathrm{x}) = \sqrt{\mathrm{x}^2 - \mathrm{x} + 1}$.

Β1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων *f*, *g* και *h*.

- *Το πεδίο ορισμού της f παρατηρούμε ότι αποτελεί την ένωση των διαστημάτων (-∞,1) και [1,+∞), δηλαδή* $D_f = (-\infty,1)U[1,+\infty) = R$.
- *Το πεδίο ορισμού της g, θα είναι όλο το R εκτός από τις τιμές που μηδενίζουν τον παρονομαστή της.*
  Λύνοντας λοιπόν την εξίσωση $x^2 - 5x + 6 = 0$ *με την βοήθεια της*
  $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$ *θα βρούμε τις λύσεις* $x_1 = \dfrac{-(-5) + \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = 3$ *και*
  $x_2 = \dfrac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = 2$
  Άρα θα έχουμε, $D_g = R - \{2,3\}$.
- *Το πεδίο ορισμού της h θα είναι το διάστημα στο οποίο το υπόρριζο πολυώνυμο θα είναι μεγαλύτερο ή ίσο του μηδενός.*
  Λύνοντας λοιπόν την ανίσωση $x^2 - x + 1 \geq 0$ *διαπιστώνουμε ότι*
  $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3$ *και συνεπώς το πρόσημο του πολυωνύμου είναι "πάντοτε ομόσημο του α" δηλαδή θετικό.*
  Καταλαβαίνουμε λοιπόν ότι $D_h = R$.

Β2. Να βρεθούν οι τιμές $f(-1), f(1)$ και $f(5)$.

- $f(-1) = \dfrac{(-1)}{(-1)-1} = \dfrac{-1}{-2} = \dfrac{1}{2}$
- $f(1) = \sqrt{1^2 - 2 \cdot 1 + 1} = \sqrt{0} = 0$
- $f(5) = \sqrt{5^2 - 2 \cdot 5 + 1} = \sqrt{25 - 10 + 1} = \sqrt{16} = 4$

Β3. Να βρεθεί η παράμετρος α της συνάρτησης *g*, έτσι ώστε να ισχύει η σχέση $g(4) = f(5)$.

- *Αξιοποιώντας την δοσμένη σχέση*

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

$$g(4) = f(5) \Leftrightarrow \frac{4\alpha}{4^2 - 5\cdot 4 + 6} = 4 \Leftrightarrow \frac{4\alpha}{2} = 4 \Leftrightarrow 4\alpha = 8 \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha = 2}$$

(10 + 7 + 8 = 25 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 9x + 20$ και $g(x) = \alpha x + \beta$.

Γ1. Αν η C_g περνά από το σημείο Σ(2, –3) και σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία 45^o, να βρεθεί ο αλγεβρικός της τύπος.

- *Παρατηρώντας τον τύπο της g, καταλαβαίνουμε ότι η C_g αποτελεί συνάρτηση ευθείας της μορφής (ε): y = αx + β*
- *Επομένως η κλίση α θα είναι ίση με την εφ45^o, δηλαδή* **α = 1**
- *Επιπλέον το σημείο Σ(2,-3) ανήκει στην C_g, καταλαβαίνουμε λοιπόν ότι g(2) = - 3*

  $\Leftrightarrow \alpha\cdot 2 + \beta = -3 \overset{\alpha=1}{\Leftrightarrow} 2\cdot 1 + \beta = -3 \Leftrightarrow \beta = -3 - 2 \Leftrightarrow \boldsymbol{\beta = -5}$
- *Ο αλγεβρικός τύπος της g λοιπόν θα είναι:* **g(x) = x - 5**

Γ2. Να βρεθούν τα σημεία στα οποία η C_f τέμνει τους άξονες x'x και y'y αντίστοιχα.

- *Η C_f τέμνει τον x'x όταν η τεταγμένη είναι 0. Θα έχουμε λοιπόν ότι :*

  $y = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 20 = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x = 4 \text{ ή } x = 5$

  τα ζητούμενα λοιπόν σημεία θα είναι τα ***Α(4,0)*** *και* ***Β(5,0)***
- *Η C_f τέμνει τον y'y όταν η τετμημένη είναι 0. Θα έχουμε λοιπόν ότι :*

  $f(0) = 0^2 - 9\cdot 0 + 20 = 0 - 0 + 20 = 20$

  το ζητούμενο λοιπόν σημείο θα είναι ***Γ(0,20)***.

Γ3. Αν α = 1 και β = –5, να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο των συναρτήσεων

i) $S = f + g$ **ii)** $P = f\cdot g$

- *Για τις πολυωνυμικές συναρτήσεις f και g γνωρίζουμε ότι $D_f = D_g = R$. Συνεπώς μπορούμε να ορίσουμε στο R τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού ανάμεσά τους.*
- $S(x) = (f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 - 9x + 20 + x - 5 = \boldsymbol{x^2 - 8x - 15}$
- $P(x) = (x^2 - 9x + 20)(x - 5) = x^3 - 5x^2 - 9x^2 + 45x + 20x - 100 = \boldsymbol{x^3 - 14x^2 + 65x - 100}$

Γ4. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $R = \frac{f}{g}$ και να απλοποιηθεί ο τύπος της.

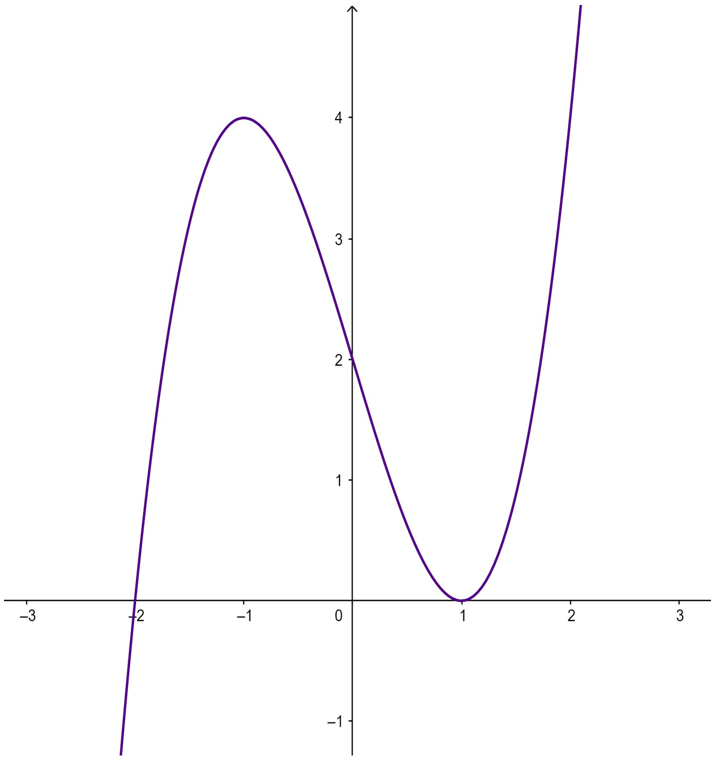
- *Η συνάρτηση R ορίζεται για όλους τους πραγματικούς αριθμούς εκτός από τις τιμές που μηδενίζουν την g.*
- $g(x) = 0 \Leftrightarrow x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$ *και άρα* $D_R = R - \{5\}$
- $R(x) = \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - 9x + 20}{x - 5} = \frac{(x-4)(x-5)}{x-5} = \boldsymbol{x - 4}$

(6 + 6 + 6 + 7 = 25 μονάδες)

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f όπου η γραφική της παράσταση παρουσιάζεται παρακάτω :



Δ1. Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας της *f*.

- *Από την γραφική παράσταση της f καταλαβαίνουμε ότι :*
  - ➔ *στο διάστημα (–∞ , – 1] είναι γνησίως αύξουσα*
  - ➔ *στο διάστημα [– 1, 1] είναι γνησίως φθίνουσα*
  - ➔ *στο διάστημα [1, +∞] είναι γνησίως αύξουσα*

Δ2. Να βρεθούν οι θέσεις και το είδος των ακροτάτων της *f*.

- *Στο διάστημα [-2 , 0] η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο, το σημείο Α(– 1, 4)*
- *Στο διάστημα [0.5 , 1.5] η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο, το σημείο Β(1,0)*

Δ3. Να συγκρίνεται τις τιμές $f(2020)$ και $f(2021)$.

- *Στο διάστημα [1 , +∞) είναι γνησίως αύξουσα και άρα για*
  $2020 < 2021 \Rightarrow f(2020) < f(2021)$

Δ4. Να λυθούν γραφικά η εξίσωση $f(\mathrm{x}) = 0$ και η ανίσωση $f(\mathrm{x}) < 0$.

- Γραφικά παρατηρούμε ότι :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \quad ή \quad x = 1$$
$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2)$$

(7 + 7 + 4 + 7 = 25 μονάδες)

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ : 2 ΩΡΕΣ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ : ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ ΚΑΡΑΓΙΑΝΝΙΔΗΣ

(7MATHS)