ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1ο Κριτήριο Αξιολόγησης

ΘΕΜΑ Α

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με **Σωστό** εάν η πρόταση είναι σωστή ή με **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

Α1. Συνάρτηση, $f: A \to B$ λέγεται η διαδικασία κατά την οποία, κάποια στοιχεία του συνόλου Α, αντιστοιχίζονται σε στοιχεία του συνόλου Β.

ΛΑΘΟΣ, *συνάρτηση λέγεται μια διαδικασία κατά την οποία κάθε στοιχείο ενός συνόλου Α, αντιστοιχίζεται σε μοναδικό στοιχείο του συνόλου Β.*

Α2. Το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης είναι πάντοτε υποσύνολο του R.

ΣΩΣΤΟ *στις πραγματικές συναρτήσεις με τις οποίες ασχολούμαστε, το πεδίο ορισμού είναι πάντοτε υποσύνολο του R.*

Α3. Σε μία σταθερή συνάρτηση, πεδίο ορισμού είναι όλο το R.

ΣΩΣΤΟ *η σταθερή συνάρτηση της μορφής f(x) = c, όπου c ένας σταθερός αριθμός, δεν παύει να αποτελεί πολυωνυμική συνάρτηση και ως τέτοια, έχει για πεδίο ορισμού όλο το R.*

Α4. Μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο Α και αντιστοίχως μία συνάρτηση g είναι ορισμένη σε ένα σύνολο Β. Τότε η συνάρτηση αθροίσματος $S = f + g$ θα ορίζεται στο διάστημα ΑUΒ.

ΛΑΘΟΣ *για να ορίζονται πράξεις ανάμεσα σε συναρτήσεις θα πρέπει* $A \cap B \neq \varnothing$.

Α5. Το σημείο $Z(x_0, y_0)$ ανήκει στην καμπύλη μιας συνάρτησης f αν και μόνο αν $f(x_0) = y_0$.

ΣΩΣΤΟ *ένα σημείο ανήκει στην καμπύλη μιας συνάρτησης, αν και μόνο αν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την συνάρτηση.*

Α6. Το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f, περιλαμβάνει όλες τις τετμημένες των σημείων της γραφικής της παράστασης.

ΛΑΘΟΣ το σύνολο τιμών περιλαμβάνει όλες τις τεταγμένες των σημείων που ανήκουν στην καμπύλη μιας συνάρτησης.

Α7. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι ορισμένες στο σύνολο Α, τότε η συνάρτηση $R = \frac{f}{g}$ είναι επίσης ορισμένη στο σύνολο Α.

ΛΑΘΟΣ *διότι από το σύνολο Α, θα πρέπει να εξαιρεθούν οι τιμές οι οποίες μηδενίζουν την συνάρτηση g.*

Α8. Η συνάρτηση $f(-x)$ είναι συμμετρική με την f ως προς τον άξονα x'x.

ΛΑΘΟΣ *αντιθέτως είναι συμμετρική ως προς τον άξονα y'y.*

Α9. Η καμπύλη μιας συνάρτησης f τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο $(0, f(0))$.

ΣΩΣΤΟ *η καμπύλη μιας συνάρτησης στο σημείο με τετμημένη x = 0 και τεταγμένη y = f(0)*

A10. Μια οριζόντια ευθεία έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με την καμπύλη μιας συνάρτησης *f*.
ΛΑΘΟΣ *μια κάθετη ευθεία έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με την καμπύλη μιας συνάρτησης f, μια οριζόντια ευθεία θα μπορούσε να έχει και περισσότερα*

(2,5 ·10 = 25 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(x-1)$, $g(x) = \dfrac{2x}{x^2 - |x|}$, $h(x) = \sqrt{x^3 - x^2 - 4x + 4}$ και $\varphi(x) = x^2 - 2x + 3$.

B1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων *f, g, h και φ.*

- *Για το πεδίο ορισμού της f θα πρέπει* $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$ *και άρα* $\boldsymbol{D_f = (1, +\infty)}$
- *Για το πεδίο ορισμού της g θα πρέπει* $x^2 - |x| \neq 0 \Leftrightarrow |x|^2 - |x| \neq 0 \Leftrightarrow |x|(|x| - 1) \neq 0$
  $|x| \neq 0$ *και* $|x| \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0$ *και* $x \neq \pm 1$
  και άρα $\boldsymbol{D_g = R - \{-1, 0, 1\}}$
- *Για το πεδίο ορισμού της h θα πρέπει* $x^3 - x^2 - 4x + 4 \geq 0$
  $\Leftrightarrow x^2(x-1) - 4(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4)(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-2)(x-1) \geq 0$
  οι ρίζες του πολυωνύμου φαίνεται ότι είναι οι x = –2 , x = 2 και x = 1, οπότε δημιουργώντας έναν πίνακα προσήμων θα έχουμε :

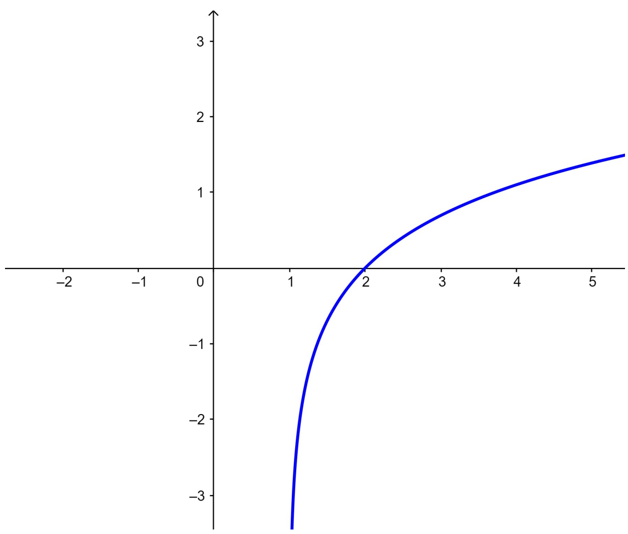
x	$-\infty$	-2		1		2		$+\infty$
$(x + 2)$	–		+		+		+	
$(x – 2)$	–		–		–		+	
$(x – 1)$	–		–		+		+	
$x^3 – x^2 – 4x + 4$	–		+		–		+	

Συνεπώς, η ζητούμενη ανίσωση αληθεύει όταν to x ανήκει στο διάστημα [-2 , 1]U[2 , +∞]
και άρα $\boldsymbol{D_h = [-2, 1] U [2, +\infty]}$

- *Τέλος, η φ ως πολυωνυμική συνάρτηση θα έχει πεδίο ορισμού* $\boldsymbol{D_\varphi = R}$.

B2. Να σχεδιαστεί η C_f

- *Η καμπύλη της f αποτελεί την μετατόπιση του γραφήματος της lnx κατά 1 μονάδα δεξιά, δηλαδή η* C_f *θα είναι η :*



B3. Να βρεθούν τα σημεία τομής της C_φ με τους άξονες x'x και y'y.

- *Τα σημεία τομής της C_φ με τον άξονα x'x θα έχουν τεταγμένη ίση με το 0, έχουμε λοιπόν :*
  $y = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x = 1$ *ή* $x = 2$ *και άρα **A(1,0)** και **B(2,0)** τα ζητούμενα σημεία τομής*
- *Το σημείο τομής της C_φ με τον άξονα y'y θα έχει τετμημένη ίση με το 0, έχουμε λοιπόν :*
  $\varphi(0) = 0^2 - 2\cdot 0 + 3 = 3$ *και άρα **Γ(0,3)** το ζητούμενο σημείο τομής*

B3. Να προσδιοριστεί η συνάρτηση $\varphi \circ f$.

- *Για να ορίζεται η σύνθεση των συναρτήσεων θα πρέπει να ισχύει* $\begin{cases} x \in D_f \\ f(x) \in D\varphi \end{cases}$
  $\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (1, +\infty) \\ ln(x-1) \in R \end{cases} \Leftrightarrow x \in (1, +\infty)$
  *Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε την συνάρτηση $\varphi \circ f$ στο διάστημα **(1, +∞)** ως εξής :*

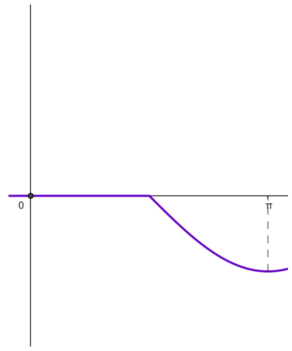
$$\varphi(f(x)) = [ln(x-1)]^2 - 2ln(x-1) + 3$$

(8 + 6 + 6 + 5 = 25 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - |\sigma\upsilon\nu x|}{2}$ ορισμένη στο διάστημα [0 , π], να παραστεί γραφικά.

- *Στο διάστημα [0 , π/2] το συνημίτονο είναι μεγαλύτερο ή ίσο του μηδενός και άρα η f γράφεται ως*
  $f(x) = \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu x}{2} = \dfrac{0}{2} = 0$
- *Στο διάστημα [π/2 , π] το συνημίτονο είναι μικρότερο ή ίσο του μηδενός και άρα η f γράφεται ως*
  $f(x) = \dfrac{\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu x}{2} = \dfrac{2\sigma\upsilon\nu x}{2} = \sigma\upsilon\nu x$
- *Συνεπώς* $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 0\ , \text{ όταν } 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ \sigma\upsilon\nu x\ , \text{ όταν } \frac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}}$
- *Η C_f λοιπόν στο ζητούμενο διάστημα έχει ως εξής*



Γ2. Να εξετασθεί αν ο αριθμός 7 ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = \log(x-1) - 3$.

- *Αρχικά το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το A = (1. +∞)*
- *Το $7 \in f(A)$ εάν και μόνο αν υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε $f(x) = 7$*

  $\Leftrightarrow \log(x-1) - 3 = 7 \Leftrightarrow \log(x-1) = 10 \Leftrightarrow \log(x-1) = \log 10^{10} \Leftrightarrow x = 10^{10} + 1$
- ***Επειδή το $10^{10}+1$ ανήκει στο πεδίο ορισμού (1,+∞) καταλαβαίνουμε τελικά ότι $7 \in f(A)$***

Γ3. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 5x^2 - 6x + 6$ και $g(x) = 4x^2 - x$. Να βρεθούν οι σχετικές θέσεις των C_f και C_g.

- *$D_f = D_g = R$ ως πολυωνυμικές συναρτήσεις*
- *Ορίζοντας την βοηθητική συνάρτηση h(x) = f(x) – g(x) στο R, θα μπορέσουμε να βρούμε τις σχετικές τους θέσεις*
- *$h(x) = 5x^2 - 6x + 6 - (4x^2 - x) = x^2 - 5x + 6$*
- *Το πολυώνυμο $x^2 - 5x + 6$ έχει ρίζες τις τιμές x = 2 και x = 3*
- *Μέσα λοιπόν από τον παρακάτω πίνακα προσήμων για την h*

x	-∞	2	3	+∞
h(x)	+	–	+	

Γίνεται αντιληπτό ότι

f(x) > g(x) στο διάστημα (-∞ , 0)U(3 ,+∞)

f(x) < g(x) στο διάστημα (2 , 3)

f(x) = g(x) στα σημεία A(2 , 14) και B(3 , 33)

Γ4. Να βρεθεί η συνάρτηση του αθροίσματος $f+g$ αλλά και του πηλίκου $\frac{f}{g}$, των συναρτήσεων f, g του προηγούμενου ερωτήματος.

- *Η συνάρτηση του αθροίσματος των συναρτήσεων f, g ορίζεται στο **R** ως εξής*

  $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 5x^2 - 6x + 6 + 4x^2 - x = \mathbf{9x^2 - 7x + 6}$
- *Ενώ η συνάρτηση του πηλίκου ορίζεται στο **R-{0 , ¼}** ως εξής*

  $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \mathbf{\frac{5x^2 - 6x + 6}{4x^2 - x}}$

(8 + 5 + 7 + 5 = 25 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Να βρεθεί η συνάρτηση f για την οποία ισχύει η σχέση $f(3x+2) = x^2 - 3x + 2$.

- *Θέτοντας y = 3x + 2 και λύνοντας ως προς x, έχουμε την σχέση $x = \frac{y-2}{3}$*
- *Αντικαθιστώντας τώρα το x, έχουμε $f(y) = (\frac{y-2}{3})^2 - 3(\frac{y-2}{3}) + 2 = \ldots = \frac{(y-5)(y-8)}{9}$*

- Άρα η ζητούμενη συνάρτηση βρέθηκε, και είναι η $\boldsymbol{f(x)=\dfrac{(x-5)(x-8)}{9}}$

Δ2. Να εκφραστεί η συνάρτηση f(x) = ημ2x + 1 ως σύνθεση δύο ή περισσοτέρων συναρτήσεων.

- *Η συνάρτηση f αποτελεί σύνθεση της συνάρτησης* ***h(x) = ημ2x*** *με την συνάρτηση* ***g(x) = x +1*** *αφού g(h(x)) = ημ2x + 1 = f(x) ,   x∈R*

(φυσικά η σύνθεση αυτή <u>δεν</u> είναι μοναδική)

Δ3. Να βρεθεί η συνάρτηση f : R → R για την οποία ισχύει η σχέση $f^2(x) = 6xf(x) - 9x^2$.

- *Από την δοσμένη σχέση έχουμε ότι*

$$f^2(x)-6xf(x)+9x^2=0 \Leftrightarrow (f(x)-3x)^2=0 \Leftrightarrow f(x)-3x=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{f(x)=3x}$$

Δ4. Έστω g : R → R μια συνάρτηση για την οποία ισχύει $g(g(x)) = 2x + 3$,   x∈R.
Να δείξετε ότι $g(2x+3) = 2g(x) + 3$,   x∈R ,   και να βρεθεί το $g(-3)$.

- *Θέτοντας όπου x το g(x) θα έχουμε*

$$g(g(g(x))) = 2g(x) + 3 \underset{g(g(x))=2x+3}{\Leftrightarrow} g(2x+3) = 2g(x) + 3$$

- *Από την σχέση g(2x+3) = 2g(x) + 3 παρατηρούμε ότι* $2x+3=x \Leftrightarrow x=-3$
Θέτοντας λοιπόν x = -3 , προκύπτει ότι g(-3) = 2g(-3) + 3 $\Leftrightarrow g(-3)-2g(-3)=3$
και άρα ***g(-3) = -3.***

(7 + 4 + 7 + 7 = 25 μονάδες)

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ : 2 ΩΡΕΣ
ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ : ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ ΚΑΡΑΓΙΑΝΝΙΔΗΣ (**7MATHS)**

“ το όχι είναι μία πολύ μικρή λέξη,
αλλά πολύ λίγοι έχουν το θάρρος να την προφέρουν ”
Αννίβας