Μια εξίσωση της μορφής **αx + βy = γ** , με $\alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$ καλείται γραμμική εξίσωση διότι παριστάνει ευθεία γραμμή και έχει ως λύση της, κάθε ζεύγος (x , y) που την επαληθεύει.

παράδειγμα

Λύσεις της εξίσωσης 3x + 2y = 6 αποτελούν τα ζεύγη π.χ.
(0,3) / (2,0) / (4,-3) / (8,-9) / (-8,15) / ...

Το ζητούμενο εδώ, δεν είναι το να αναζητούμε τις λύσεις σε τέτοιες εξισώσεις, αλλά το να βρίσκουμε πότε δύο γραμμικές εξισώσεις συναληθεύουν, έχουν δηλαδή κάποια κοινή λύση*(γραφικά κάποιο κοινό σημείο)*. Η αναζήτηση αυτή λέγεται **επίλυση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους** και παρακάτω θα δούμε τους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να το πετύχουμε αυτό.

παράδειγμα

Να λυθεί το σύστημα $(\Sigma): \begin{cases} 2x+y=7 \\ 3x-5y=4 \end{cases}$

(α' τρόπος) *Μέθοδος αντίθετων συντελεστών*

- *πολλαπλασιάζουμε μία από τις δύο εξισώσεις(ή και τις δύο αν αυτό απαιτείται) με τον κατάλληλο αριθμό, ώστε να δημιουργήσουμε αντίθετους συντελεστές για κάποια από τις δύο μεταβλητές (είτε για τα* x, *είτε για τα* y)

$$\begin{cases} \mathbf{2x+y=7} \\ \mathbf{3x-5y=4} \end{cases} \quad (\cdot 5) \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{10x+5y=35} \\ \mathbf{3x-5y=4} \end{cases}$$

- *προσθέτουμε κατά μέλη ώστε να φτάσουμε σε μια εξίσωση με μία μεταβλητή την οποία και ξέρουμε να επιλύουμε*

$$\mathbf{13x=39 \Leftrightarrow x=\frac{39}{13} \Leftrightarrow x=3}$$

- *αφού βρούμε την τιμή της μίας μεταβλητής, αντικαθιστούμε σε μία από τις δύο εξισώσεις βρίσκοντας έτσι και την δεύτερη μεταβλητή.*

$$\textbf{για } \mathbf{x=3:} \quad \mathbf{2\cdot 3+y=7 \Leftrightarrow 6+y=7 \Leftrightarrow y=7-6 \Leftrightarrow y=1}$$

- *η μοναδική λύση λοιπόν του συστήματος θα είναι η*

(x, y) = (3, 1)

(β' τρόπος) *Μέθοδος της αντικατάστασης*

✔ *λύνουμε την μία από τις δύο εξισώσεις ως προς την μία από τις δύο μεταβλητές (είτε ως προς x, είτε ως προς y)*

$$\begin{cases} 2x+y=7 \\ 3x-5y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=7-2x \\ 3x-5y=4 \end{cases}$$

✔ *αντικαθιστούμε στην δεύτερη εξίσωση την σχέση που βρήκαμε και την επιλύουμε βρίσκοντας έτσι την μία μεταβλητή*

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=7-2x \\ 3x-5y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=7-2x \\ 3x-5(7-2x)=4 \end{cases} \Leftrightarrow 3x-35+10x=4 \Leftrightarrow x=3$$

✔ *έπειτα επιστρέφουμε πάλι στην προηγούμενη εξίσωση, αντικαθιστούμε και βρίσκουμε την τιμή της δεύτερης μεταβλητής*

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=7-2x \\ x=3 \end{cases} \Leftrightarrow y=7-2\cdot 3=1 \Leftrightarrow (x,y)=(3,1)$$

(γ' τρόπος) *Μέθοδος της ορίζουσας*

✔ *βρίσκουμε την ορίζουσα D του συστήματος όπου* $D=\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \alpha_1\cdot\beta_2-\alpha_2\cdot\beta_1$

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} \Leftrightarrow 2\cdot(-5)-3\cdot 1=-13$$

✔ *εάν* $D\neq 0$ *τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση* $x=\dfrac{D_x}{D}$ *και* $y=\dfrac{D_y}{D}$ *όπου*

$$D_x=\begin{vmatrix} \gamma_1 & \beta_1 \\ \gamma_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \gamma_1\cdot\beta_2-\gamma_2\cdot\beta_1 \quad \textit{και} \quad D_y=\begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \alpha_1\cdot\gamma_2-\alpha_2\cdot\gamma_1$$

$$D_x=\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} \Leftrightarrow 7\cdot(-5)-4\cdot 1=-39 \quad \text{και} \quad D_y=\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \Leftrightarrow 2\cdot 4-3\cdot 7=-13$$

επομένως $x=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{-39}{-13}=3$ **και** $y=\dfrac{D_y}{D}=\dfrac{-13}{-13}=1$

✔ *όπως εύκολα γίνεται αντιληπτό, εάν D = 0 τότε το σύστημα είναι είτε αδύνατο είτε έχει άπειρες λύσεις* (δ' τρόπος) *Γραφική επίλυση του συστήματος*

✔ *βρίσκουμε τις γραφικές παραστάσεις των δύο εξισώσεων και έπειτα ελέγχουμε ποιο είναι το σημείο τομής τους (εάν βέβαια υπάρχει, διότι μπορεί οι ευθείες να είναι παράλληλες, να μην έχουν δηλαδή κανένα κοινό σημείο ή και να ταυτίζονται, δηλαδή να έχουν άπειρα κοινά σημεία)*